Démonstration de l'identité d'Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$ à l'aide des séries de Taylor.

Kévin Brault

03/10/2024

1 Introduction

L'identité d'Euler est une équation célèbre en mathématiques :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Elle relie cinq des nombres les plus fondamentaux des mathématiques : e, i, π, 1, et 0. En plus cela, trois types de nombres sont représentés : les entiers, les nombres irrationnels et les nombres imaginaires. Cette équation est obtenu depuis la formule d'Euler qui établit la relation fondamentale entre les fonctions trigonométriques et la fonction exponentielle complexe :

$$e^{i} = \cos x + i \sin x$$

En fixant $x = \pi$ la forme intermédiaire devient donc : $e^{i\pi} = -1$. Cette égalité correspond au point du cercle unitaire (cercle de rayon 1 centré à l'origine (0,0)) dont l'angle par rapport à l'axe des réels positifs est π (voir représentation de la Figure 1). En d'autres termes, $e^{i\pi}$ se rapporte à un point spécifique sur le cercle unitaire, qui se trouve directement sur l'axe des réels négatifs à un angle de π radians.

Il y a plusieurs méthodes pour démontrer l'identité d'Euler. La méthode basée sur les séries de Taylor est l'une des approches analytiques pour démontrer l'identité d'Euler. Elle repose sur le développement en série de Taylor de fonctions transcendantes telles que la fonction exponentielle, le cosinus et le sinus.

2 Démonstration

Les séries de Taylor permettent de représenter une fonction différentiable de manière infinie comme une somme infinie de termes dérivés de cette fonction en un point. Ainsi, la série de Taylor d'une fonction $f(x)$ autour de $x = 0$ est donnée par :

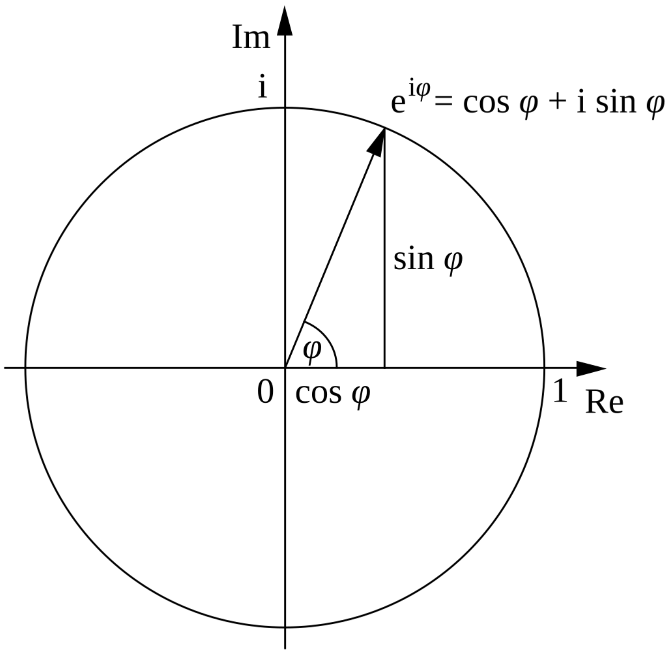

Figure 1 – Illustration de la formule d'Euler dans le plan complexe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

où $f^{(n)}(0)$ est la n-ème dérivée de $f(x)$ évaluée en $x = 0$, et $n!$ représente la factorielle de n.

La fonction exponentielle complexe e^z, où z est un nombre complexe, admet un développement en série de Taylor autour de 0, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$. Cette série est donnée par :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots .$$

Cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Pour la fonction exponentielle complexe, nous voulons étudier le cas où l'argument est purement imaginaire, c'est-à-dire $z = ix$ où x est un réel. Nous avons donc :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}.$$

Développons les premiers termes de cette série en séparant les puissances paires et impaires de ix. En utilisant le fait que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ ... etc, on obtient :

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

Cette série peut être réorganisée en séparant les termes réels et imaginaires :

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right).$$

Les séries de Taylor des fonctions trigonométriques $\cos(x)$ et $\sin(x)$, également développées autour de 0, sont respectivement :

— Pour le cosinus :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

— Pour le sinus :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

En comparant les séries obtenues pour e^{ix} avec celles de $\cos(x)$ et $\sin(x)$, on observe que :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

On retrouve ici la formule d'Euler et constitue un résultat fondamental en analyse complexe. Elle montre que l'exponentielle complexe e^{ix} peut être exprimée en termes des fonctions trigonométriques réelles $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Maintenant que nous avons établi que :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

nous pouvons appliquer cette formule au cas où $x = \pi$. En utilisant les valeurs des fonctions trigonométriques pour π :

$$\cos(\pi) = -1 \quad \text{et} \quad \sin(\pi) = 0,$$

nous obtenons :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + 0i = -1.$$

Nous avons ainsi montré que :

$$e^{i\pi} = -1.$$

En ajoutant 1 des deux côtés de l'équation, nous obtenons l'identité d'Euler :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Il est important de noter que la série de Taylor utilisée ici pour e^{ix}, ainsi que les séries de Taylor pour $\cos(x)$ et $\sin(x)$, convergent absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. La validité de la preuve repose donc sur la convergence de ces séries infinies et sur le fait que les propriétés des séries formelles sont respectées.